

考点一 等腰三角形

1. 等腰三角形：有关概念及分类

有两边相等：三角形叫做等腰三角形，有三边相等：三角形叫做等边三角形，也叫正三角形

2. 等腰三角形：性质

1) 等腰三角形：两个底角相等（简称“等边对等角”）

2) 等腰三角形：顶角平分线、底边上：中线、底边上：高互相重合（简称“三线合一”）

3) 等腰三角形是轴对称图形，它有一条对称轴

3. 等腰三角形：判定

如果一个三角形有两个角相等，那么这两个角所对：边也相等（“等角对等边”）

考点二 等边三角形：性质与判定

1. 等边三角形：性质

1) 等边三角形：三个内角相等，且都等于 60°

2) 等边三角形：三条边都相等

3) 等边三角形是轴对称图形，它有三条对称轴

2. 等边三角形：判定

1) 三条边相等：三角形 2) 三个角相等：三角形 3) 有一个角为 60° ：等腰三角形

3. 等边三角形：重心、内心、外心、垂心重合于一点，称为等边三角形的中心（“四心合一”）

重心：中线：交点、

内心：角平分线：交点、内切圆：圆心、

外心：三边垂直平分线：交点、外接圆：圆心、

垂心：高线（垂线）：交点、

考点三 线段垂直平分线

1. 概念: 经过线段中点, 并且垂直于这条线段的直线, 叫做这条线段的垂直平分线, 也叫中垂线

2. 性质: 线段垂直平分线上一点, 到这条线段两个端点距离相等

3. 判定: 到一条线段两个端点距离相等一点, 在线段的垂直平分线上,

线段垂直平分线可以看作是到线段两端点距离相等一点集合

考点四 角平分线: 性质及判定

1. 性质: 角平分线上一点到角两边距离相等

2. 判定: 角内部到角两边距离相等一点, 在角平分线上,

角平分线可以看作是到角两边距离相等一点集合

3. 三角形角平分线: 性质: 三角形三条角平分线交于一点, 且这一点到三角形三边距离都相等

习题

1. 已知一个等腰三角形，两条边长分别为3和8，则这个等腰三角形的周长为？

1) 若3为底边，8为腰，则第三条边一边长为8

$$\text{周长} = 3 + 8 + 8 = 19$$

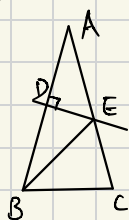
2) 若8为底边，3为腰，则第三条边一边长为3

$$\therefore 3 + 3 < 8$$

$\therefore$ 不符合三角形定义

2. 如图，在等腰三角形ABC中， $AB = AC$ ， $\angle A = 20^\circ$ ，线段AB的垂直平分线

交AB于点D，交AC于点E，连接BE，则 $\angle CBE$ 等于？



解： $\because$ 在三角形ABC中， $AB = AC$ ， $\angle A = 20^\circ$

$$\therefore \angle ABC = \angle C = (180^\circ - 20^\circ) \div 2 = 80^\circ$$

$\because$ DE是AB的中垂线

$$\therefore AD = BD, \angle ADE = \angle BDE = 90^\circ, DE = DE$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle BDE \text{ (SAS)}$$

$$\therefore \angle ABE = \angle A = 20^\circ$$

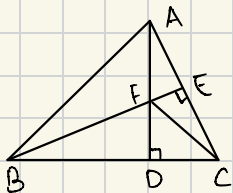
$$\therefore \angle CBE = \angle ABC - \angle ABE$$

$$= 80^\circ - 20^\circ$$

$$= 60^\circ$$

3. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=BC$, $DE \perp AC$ 于点 E , $AD \perp BC$ 于点 D , $\angle BAD = 45^\circ$.

AD 与 BE 交于点 F , 连接 CF



1. 求证: $BF = 2AE$

$\because AD \perp BC, \angle BAD = 45^\circ$

$\therefore$ 在 $\triangle ABD$ 中:

$$\begin{aligned}\angle ABD &= 180^\circ - \angle BDA - \angle BAD \\ &= 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ \\ &= 45^\circ\end{aligned}$$

$\therefore \triangle ABD$ 是等腰三角形

$\therefore AD = BD$ ①

在 $\triangle BCE$ 中

$\because BE \perp AC$

$\therefore \angle EBC$ 与 $\angle BCE$ 互余 ②

在 $\triangle ADC$ 中

$\because AD \perp BC$

$\therefore \angle DAC$ 与 $\angle BCE$ 互余 ③

由 ②、③ 推出:

$$\angle EBC = \angle DAC \quad ④$$

又 $\because \angle BDF = \angle ADC = 90^\circ$ ⑤

$\therefore$ 由 ① ④ ⑤ 推出:

$$\triangle BDF \cong \triangle ADC \quad (ASA)$$

$\therefore BF = AC$

又 $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = BC, DE \perp AC$

$\therefore$ 三线合一: $AE = EC$

$$\therefore BF = 2AE$$

2. 若 $CD = \sqrt{2}$, 求 $AD = k$

$\because \triangle ADB$ 是等腰直角三角形

$\therefore$ 设: $AD = BD = x$

$$\text{则: } AB = \sqrt{2}x$$

又 $\because AB = BC$

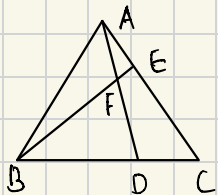
$$\therefore \sqrt{2}x = x + \sqrt{2}$$

$$\text{解得: } x = 2 + \sqrt{2}$$

$$\therefore AD = 2 + \sqrt{2}$$

4. 已知 $\triangle ABC$ 为等边三角形, 点 D, E 分别在 BC, AC 边上, 且 $AE = CD$.

AD 与 BE 相交于点 F , 求 $\angle BFD$ 的度数?



$$\because AB = AC, \angle BAC = \angle C = 60^\circ, AE = CD$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACD$$

$$\therefore \angle ABE = \angle DAC$$

$\therefore \angle AFE$ 是 $\triangle ABF$ 的一个外角

$$\therefore \angle AFE = \angle ABE + \angle BAD$$

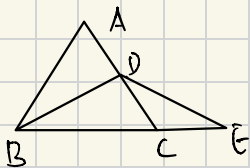
$$= \angle DAC + \angle BAD$$

$$= \angle BAC = 60^\circ$$

$\therefore \angle BFD$ 与 $\angle AFE$ 为对顶角

$$\therefore \angle BFD = \angle AFE = 60^\circ$$

5. 如图, 已知在等边三角形 ABC 中 D 是 AC 边上取中点, 在 BC 的延长线上取一点 E , 使 $CE = CD$, 求证: $BD = DE$



$\because \triangle ABC$ 是等边三角形且 D 是 AC 中点.

$$\therefore \angle BDC = 90^\circ, \angle DBC = \frac{1}{2} \angle ABC = 30^\circ \text{ (三线合一)}$$

在 $\triangle DCE$ 中:

$$\because CD = CE$$

$$\therefore \angle E = \angle CDE$$

$$\text{设: } \angle EDC = \angle CDE = x$$

在 $\triangle BDE$ 中:

$$\angle DBC + \angle BDC + \angle CDE + \angle E = 180^\circ$$

$$30^\circ + 90^\circ + x + x = 180^\circ$$

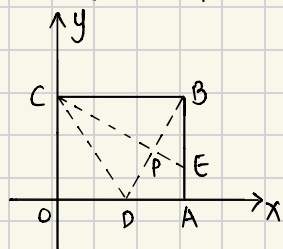
$$x = 30^\circ$$

$$\therefore \angle DBE = \angle E = 30^\circ$$

$\therefore \triangle BDE$ 为等腰三角形

$$\therefore BD = DE$$

6. 一张矩形纸片 $OABC$ 平放在平面直角坐标系内, O 为原点, 点 A 在 x 轴正半轴上, 点 C 在 y 轴正半轴上, $OA=5$, $OC=4$



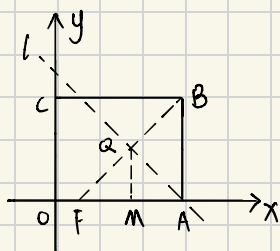
图①

1) 如图①, 将纸片沿 CE 对折, 点 B 落在 x 轴上点 D 处, 求点 D 的坐标!

在 $\triangle OCD$ 中: $CD=CB=5$, $OC=4$

$$\text{则: } OD = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(3, 0)$



图②

2) 如图②, 若将纸片沿直线 l 对折, 点 B 落在 x 轴上点 F 处,

l 与 BF 交点为 Q , 若点 Q 的坐标是 $(3, 2)$, 求 l 的解析式.

若点 Q 的坐标是 $(4, 2)$, 你能确定 l 的解析式吗? 若能, 求其解析式; 若不能, 说明理由!

若点 Q 的坐标是 $(3, 2)$

设直线 BF 的解析式为 $y=kx+b$

把 $Q(3, 2)$, $B(5, 4)$ 代入:

$$\begin{cases} 2=3k+b \\ 4=5k+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=1 \\ b=-1 \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 BF 的解析式为 $y=x-1$

$\therefore$ 直线 $l \perp BF$

$\therefore$ 设直线 l 的解析式为 $y=-x+b$

把 $Q(3, 2)$ 代入:

$$2=-3+b \Rightarrow b=5$$

$\therefore$ 直线 l 的解析式为 $y=-x+5$

若点 Q 的坐标是 $(4, 2)$

设直线 BF 的解析式为 $y=kx+b$

把 $Q(4, 2)$, $B(5, 4)$ 代入:

$$\begin{cases} 2=4k+b \\ 4=5k+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=2 \\ b=-6 \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 BF 的解析式为 $y=2x-6$

$\therefore$ 直线 $l \perp BF$

$\therefore$ 设直线 l 的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x+b$

把 $Q(4, 2)$ 代入:

$$2=-2+b \Rightarrow b=4$$

$\therefore$ 直线 l 的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x+4$

将 $y=4$ 代入: $4=-\frac{1}{2}x+4 \Rightarrow x=0$

将 $x=5$ 代入: $y=-\frac{1}{2} \times 5 + 4 \Rightarrow y=\frac{3}{2} < 4$

$\therefore$ 能确定解析式, 为 $y=-\frac{1}{2}x+4$