

考点一 一元二次方程概念

1. 定义: 只含有一个未知数, 且未知数最高次数是2的整式方程

2. 一般形式: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

考点二 一元二次方程根判别式

关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根判别式为 $b^2 - 4ac$, 记作 Δ

1) $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 有两个不相等实数根

$\Delta = 0 \Leftrightarrow$

相等: 为 $\frac{-b}{2a}$

$\Delta < 0 \Leftrightarrow$

没有实数根

考点三 一元二次方程解法

1. 开平方法: 若 $x^2 = a$ ($a \geq 0$), 则 $x = \pm\sqrt{a}$, 即: $x_1 = \sqrt{a}$, $x_2 = -\sqrt{a}$

2. 配方法:

有解

若 $x^2 + px + q = 0$, 且 $p^2 - 4q \geq 0$, 则 $(x + \frac{p}{2})^2 = -q + (\frac{p}{2})^2$ (凑)

$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{-q + (\frac{p}{2})^2}$, $x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{-q + (\frac{p}{2})^2}$

即: $x^2 + px + (\frac{p}{2})^2 + (q - (\frac{p}{2})^2) = 0$
 $(x + \frac{p}{2})^2 + (q - (\frac{p}{2})^2) = 0$

当二次项系数不为1时, 先在方程两边同除以二次项系数,

把二次项系数化为1, 再进行配方法

3. 公式法

方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), 且 $b^2 - 4ac \geq 0$, 则 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

4. 分解因式法

一般步骤:

- 1) 将方程右边各项移到左边, 使右边为0
- 2) 将方程左边分解为两个一次因式乘积形式
- 3) 令每个因式为0, 得到两个一元一次方程
- 4) 解这两个方程, 它们的解就是原方程的解

十字相乘法:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix} \text{ 满足 } a_1 \cdot a_2 = a$$

$$c \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \end{matrix} \text{ 满足 } c_1 \cdot c_2 = c$$

$$\text{如: } -x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{matrix}$$

$$1x+2 + 1x(-1) = -3$$

$$\text{原式} = (x-1)(x-2) = 0$$

$$\text{解得 } x_1 = 1, x_2 = 2$$

十字相乘之和

$$\begin{matrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{matrix}$$

$$\text{若: } a_1 c_2 + a_2 c_1 = b$$

$$\text{则: 原式 } ax^2 + bx + c = 0$$

↓

$$(a_1 x + c_1)(a_2 x + c_2) = 0$$

$$\text{如: } 2x^2 - 9x + 9 = 0$$

$$\begin{matrix} 1 & -3 \\ 2 & -3 \end{matrix}$$

$$-3 + 2x(-3) = -9$$

$$(x-3)(2x-3) = 0$$

$$x_1 = 3, x_2 = \frac{3}{2}$$

考点四 韦达定理

一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0, \Delta \geq 0$) 的两个根 x_1, x_2 满足:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

习题

1. 若 $x = -2$ 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - \frac{5}{2}ax + a^2 = 0$ 的一个根, 则 a 值为?

$$\text{将 } x = -2 \text{ 代入: } (-2)^2 - \frac{5}{2} \times (-2)a + a^2 = 0$$

$$a^2 + 5a + 4 = 0$$

$$\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 4 \end{array}$$

$$4+1=5$$

$$(a+1)(a+4) = 0$$

$$a_1 = -1, a_2 = -4$$

2. 用配方法解方程 $x^2 - 4x + 2 = 0$

$$x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$(x-2)^2 = 2$$

$$x-2 = \pm\sqrt{2}$$

$$x_1 = 2+\sqrt{2}, x_2 = 2-\sqrt{2}$$

3. 若 a, b, c 为常数, 且 $(a-c)^2 > a^2 + c^2$, 则关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 根的情况?

$$(a-c)^2 > a^2 + c^2$$

$$a^2 - 2ac + c^2 > a^2 + c^2$$

$$-2ac > 0$$

$$\therefore b^2 \geq 0$$

$$b^2 - 4ac > 0$$

$\therefore$ 有两个不相等的实数根

4. 已知关于 x 的一元二次方程 $(m-2)^2 x^2 + (2m+1)x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根,

则 m 的取值范围?

$$\text{一元二次方程} \rightarrow (m-2)^2 \neq 0 \\ m \neq 2$$

有两个不相等实数根 $\rightarrow \Delta > 0$

$$(2m+1)^2 - 4(m-2)^2 > 0$$

$$4m^2 + 4m + 1 - 4(m^2 - 4m + 4) > 0$$

$$\cancel{4m^2} + 4m + 1 - \cancel{4m^2} + 16m - 16 > 0$$

$$20m - 15 > 0$$

$$m > \frac{3}{4}$$

答: $m > \frac{3}{4}$ 且 $m \neq 2$

5. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 6x + k + 1 = 0$ 的两个实数根分别是 x_1, x_2 ,

且 $x_1^2 + x_2^2 = 24$, 则 k 的值是?

$$x_1^2 + x_2^2 = 24$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 24$$

韦达定理:

$$6^2 - 2(k+1) = 24$$

$$36 - 24 = 2k + 2$$

$$2k = 10$$

$$k = 5$$