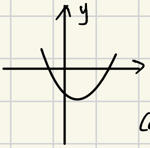
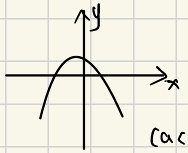
考点一　二次函数的概念。

一般形式：$y=ax^2+bx+c$（a,b,c是常数，$a\neq0$）

考点二　二次函数的图像与性质 ☆

| | | |
|---|---|---|
| 图像（抛物线） |  (a>0) |  (a<0) |
| 开口方向 | 向上 | 向下 |
| 对称轴 | 直线 $x=\frac{-b}{2a}$ | |
| 顶点坐标 | $\left(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ | |
| 增减性 | $x<\frac{-b}{2a}$，y随x↑而↓；<br>$x>\frac{-b}{2a}$，y随x↑而↑ | $x<\frac{-b}{2a}$，y随x↑而↑；<br>$x>\frac{-b}{2a}$，y随x↑而↓ |
| 最值 | $x=\frac{-b}{2a}$时，y有最小值：$\frac{4ac-b^2}{4a}$ | $x=\frac{-b}{2a}$时，y有最大值：$\frac{4ac-b^2}{4a}$ |

考点三　二次函数图像的特征与a、b、c及$b^2-4ac$的符号之间的关系。

| 字母的符号 | 图像的特征 |
|---|---|
| $a>0$ | 开口向上 |
| $a<0$ | 开口向下 |
| $b=0$ | 对称轴为y轴 |
| $ab>0$ | 对称轴在y轴左侧 |
| $ab<0$ | 对称轴在y轴右侧 |
| $c=0$ | 经过原点。 |
| $c>0$ | 与y轴正半轴相交 |
| $c<0$ | 与y轴负半轴相交 |
| $b^2-4ac=0$ | 与x轴有唯一交点。（顶点） |
| $b^2-4ac>0$ | 与x轴有两个交点。 |
| $b^2-4ac<0$ | 与x轴没有交点。 |

⇗ 一元二次函数根的判别式，与Δ的关系。

## 考点四　二次函数图像的平移

抛物线 $y=ax^2$ 与 $y=a(x-h)^2$，$y=ax^2+k$，$y=a(x-h)^2+k$ 中 $a$ 相同，则图像的形状和大小都相同，只是位置的不同，即：平移

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
y=ax^2 \arrow[r, "\text{上加下减}", "\text{向上(下)平移了}|k|\text{个单位}"'] \arrow[d, "\text{向左(右)平移了}|h|\text{个单位}", "\text{左加右减}"'] \arrow[dr, "\text{上(下)}|k|", "\text{左(右)}|h|"'] & y=ax^2+k \arrow[d, "\text{左(右)}|h|", "\text{左加右减}"'] \\
y=a(x-h)^2 \arrow[r, "\text{上加下减}", "\text{上(下)}|k|"'] & y=a(x-h)^2+k
\end{tikzcd}
$$

## 考点五　二次函数关系式的确定

1. 一般式：$y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$

   若已知图像上三个点的坐标，则设一般式，分别代入，求解 $a$、$b$、$c$

2. 交点式：$y=a(x-x_1)(x-x_2)\ (a\neq 0)$

   若已知图像与 $x$ 轴的两个交点的坐标，则设交点式，再将第三个点的坐标或其它已知条件代入，求出待定系数 $a$，最后将关系式化为一般式

3. 顶点式：$y=a(x-h)^2+k\ (a\neq 0)$　　顶点坐标 $(h,k)$

   若已知图像的顶点坐标或对称轴方程与最大值或最小值，则设顶点式，将已知条件代入，求出待定系数后化为一般式

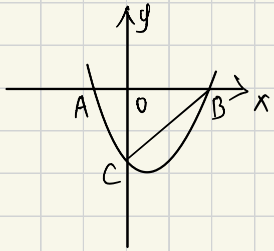
## 考点六 二次函数的应用

1、二次函数的应用关键在于建立二次函数的数学模型，这就需要认真审题，理解题意，利用二次函数解决实际问题，应用最多的是根据二次函数的最值确定最大利润、最节省方案等问题

2、建立平面直角坐标系，把代数问题与几何问题进行互相转化，充分结合三角函数、解直角三角形、相似、全等、圆等知识解决问题，求二次函数的解析式是解题关键

习题

1、如图，二次函数 $y=x^2-2x-3$ 之图像与x轴交于A、B两点，与y轴交于点C，则下列说法错误之是？




A. $AB=4$ ✓

$x^2-2x-3=0$

$\begin{matrix}1 & & 1\\ & \times & \\ 1 & & -3\end{matrix}$

$(x+1)(x-3)=0$

$x_1=-1,\ x_2=3$

B. $\angle ABC=45°$ ✓

$|OB|=3$

$|OC|=3$

C. 当 $x>0$ 时，$y<-3$ ✗

D. 当 $x>1$ 时，y随x之增而增 ✓

$\frac{-b}{2a}=1$

2、把抛物线 $y=-x^2$ 向左平移1个单位，然后向上平移3个单位，则平移后抛物线之解析式为？

$y=-x^2$

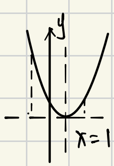
$\leftarrow 1:\ y=-(x+1)^2$

$\uparrow 3:\ y=-(x+1)^2+3$

$=-(x^2+2x+1)+3$

$=-x^2-2x+2$

3、已知抛物线 $y=ax^2+bx+c\ (a>0)$ 之对称轴为直线 $x=1$，且经过点 $(-1,y_1)$，$(2,y_2)$，试比较 $y_1$ 和 $y_2$ 之大小？

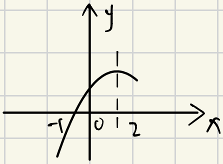



$\because |-1-1|>|2-1|$

又 $\because$ 开口向上

$\therefore y_1>y_2$

4. 二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 之部分图像如图所示，图像过 $(-1,0)$，对称轴为 $x=2$，则？




A. $4a+b=0$ ✓

$$\frac{-b}{2a}=2$$
$$-b=4a$$
$$4a+b=0$$

B. $9a+c>3b$ ✗

令 $x=-3$

$y=9a-3b+c<0$ (如图)

$9a+c<3b$

C. $8a+7b+2c>0$ ✓

代入 $b=-4a$:

$8a-28a+2c$

$-20a+2c$

开口向下: $a<0$

交于y正半轴: $c>0$

$-20a+2c>0$

D. 当 $x>-1$ 时, $y$ 随 $x$ 之↑而↑ ✗

如图

5. 已知一抛物线与x轴交点是 $A(-2,0)$, $B(1,0)$, 且过点 $C(2,8)$

1) 求该抛物线之解析式？

$y=a(x+2)(x-1)$

$x=2, y=8$ 代入:

$8=a\times 4\times 1$

$a=2$

原式: $y=2(x+2)(x-1)$

$=2x^2-2x+4x-4$

$=2x^2+2x-4$

2) 求该抛物线之顶点坐标.

法一: $\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-2}{2\times 2}=-\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{4ac-b^2}{4a}=\dfrac{4\times 2\times(-4)-2^2}{4\times 2}=\dfrac{-36}{8}=-\dfrac{9}{2}$

顶点坐标: $\left(-\frac{1}{2},-\frac{9}{2}\right)$

法二: $y=2x^2+2x-4$

$=2(x^2+x-2)$

$=2\left[x^2+x+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right]$

$=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{2}$

顶点坐标: $\left(-\frac{1}{2},-\frac{9}{2}\right)$

6. 若关于x的一元二次方程 $(x-2)(x-3)=m$ 有实数根 $x_1$、$x_2$，且 $x_1 \neq x_2$，则？

① $x_1=2$，$x_2=3$ ✗ m不一定为零

② $m>-\frac{1}{4}$ ✓

$(x-2)(x-3)=m$

$x^2-5x+6-m=0$

又∵有两个不相等的实数根

$\therefore \Delta=(-5)^2-4(6-m)>0$

$25-24+4m>0$

$m>-\frac{1}{4}$

③ 二次函数 $y=(x-x_1)(x-x_2)+m$ 的图像与x轴交点的坐标为 $(2,0)$ 和 $(3,0)$ ✓

$x^2-5x+6-m=0$

韦达定理：

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a}=5 \\ x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}=6-m \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y &= (x-x_1)(x-x_2)+m \\ &= x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2+m \\ &= x^2-5x+6-m+m \\ &= x^2-5x+6 \\ &= (x-2)(x-3) \end{aligned}$$

∴ 结论正确