

考点一 圆：有关概念及其对称性

1. 圆：定义

1) 圆是平面内到一定点，距离等于定长所有点组成图形，这个定点叫做圆心，定长叫做半径

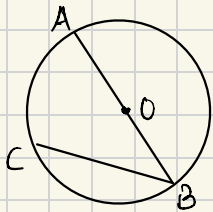
2) 平面内一条线段绕着一个固定端点，旋转一周，另一个端点所形成图形叫做圆，固定端点叫做圆心，这条线段叫做半径

2. 弧：圆上任意两点间一部分叫做圆弧，简称弧，弧用符号“ $\overset{\frown}{}$ ”表示

圆：任意一条直径：两个端点，分圆成两条弧，每条弧都叫做半圆

小于半圆：弧叫做劣弧，在图中以B、C为端点，劣弧记作“ $\overset{\frown}{BC}$ ”

大于半圆：弧叫做优弧，优弧要用三个字母表示，在图中“ $\overset{\frown}{BAC}$ ”



3. 弦：连接圆上任意两点，线段叫做弦，经过圆心的弦叫做直径

4. 弦心距：从圆心到弦的距离（即：过圆心作弦的垂线）

5. 弓形：由弦及其所对弧组成图形

6. 同心圆：圆心相同，半径不等：圆

7. 等圆：圆心不同，半径相等：圆

8. 等弧：在同圆或等圆中，能够重合：弧

9. 圆 - 对称性

1) 圆 - 轴对称性: 圆是轴对称图形, 有无数条对称轴, 经过圆心: 每一条直线都是它的对称轴

2) 圆 - 中心对称性: 圆是以圆心为对称中心 - 中心对称图形

3) 圆是旋转对称图形: 圆绕圆心旋转任意角度, 都能和原来图形重合
这就是圆 - 旋转不变性

考点二 圆心角、弧、弦之间关系

1. 定理: 在同圆或等圆中, 相等圆心角所对弧相等, 所对弦相等

2. 推论: 在同圆或等圆中, 1) 两个圆心角相等; 2) 两条弧相等; 3) 两条弦相等.
若三项中有一项成立, 则其余对应两项也成立

考点三 垂径定理及推论

1. 垂径定理: 垂直于弦的直径平分这条弦, 并且平分弦所对两条弧

2. 推论 1:

1) 平分弦 (不是直径) 的直径垂直于弦, 并且平分弦所对两条弧

2) 弦的垂直平分线经过圆心, 并且平分弦所对两条弧

3) 平分弦所对一条弧的半径, 垂直平分弦, 并且平分弦所对另一条弧

3. 推论 2: 圆中两条平行弦所夹弧相等

考点四 圆心角与圆周角

1. 定义

- 1) 圆心角: 顶点在圆心上, 角的两边都与圆相交的角
- 2) 圆周角: 顶点在圆上, 角的两边都与圆相交的角

2. 性质

- 1) 圆心角 = 度数等于它所对弧的度数 (弧度制一起学)
- 2) 一条弧所对的圆周角 = 度数等于它所对圆心角度数的一半
- 3) 同圆或等圆中, 同弧或等弧所对的圆周角相等;
同圆或等圆中, 相等圆周角所对的弧相等
- 4) 半圆 (或直径) 所对的圆周角是直角: 90° ; 圆周角所对的弦是直径

考点五 确定圆 - 条件

1. 不在同一直线上的三个点确定一个圆
2. 三角形 - 外接圆: 经过三角形各顶点的圆叫做三角形的外接圆, 这个三角形叫做圆的内接三角形, 外接圆的圆心叫做三角形的外心, 外心是三角形三边垂直平分线的交点.
锐角三角形 - 外心在三角形内部; 直角三角形 - 外心是斜边中点; 钝角三角形外心在外部.

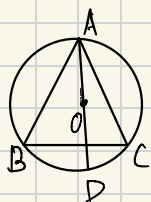
3. 圆 - 内接多边形

如果一个多边形所有顶点都在一个圆上, 那么这个多边形叫做圆的内接多边形, 这个圆叫做多边形的外接圆.

圆内接四边形 - 对角互补

题

1. 如图, AD 是 $\triangle ABC$ 外接圆 $\odot O$ 的直径, 若 $\angle B = 64^\circ$, 则 $\angle DAC = ?$



如图作辅助线

$\because \angle B$ 是 $\widehat{AC}$ 所对 $\therefore$ 圆周角, $\angle AOC$ 是 $\widehat{AC}$ 所对 $\therefore$ 圆心角

$$\therefore \angle AOC = 2\angle B = 2 \times 64^\circ = 128^\circ$$

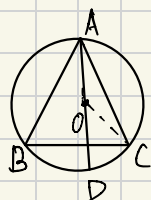
$\because OA$ 和 OC 是 $\odot O$ 的半径

$$\therefore OA = OC$$

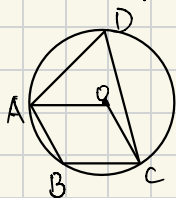
$\therefore \triangle OAC$ 是等腰三角形

$$\therefore \angle OAC = \angle OCA$$

$$\therefore \angle OAC = \frac{1}{2}(180^\circ - 128^\circ) = 26^\circ$$



2. 如图, 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, 四边形 $ABCO$ 是平行四边形, 则 $\angle ADC = ?$



法一:

$\because AO, CO$ 是 $\odot O$ 的半径

$$\therefore AO = CO$$

又 $\because$ 四边形 $ABCO$ 是 $\square$

$\therefore$ 四边形 $ABCO$ 是菱形

$$\therefore AO = AB = CO = BC$$

如图作辅助线

$\because OB$ 也是 $\odot O$ 的半径

$$\therefore AO = BO = CO$$

$\therefore \triangle ABO$ 和 $\triangle CBO$ 都是等边三角形

$$\therefore \angle AOC = \angle AOB + \angle COB = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$$

$\because \angle AOC$ 是 $\widehat{AC}$ 所对 $\therefore$ 圆心角, $\angle D$ 是 $\widehat{AC}$ 所对 $\therefore$ 圆周角

$$\therefore \angle D = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$$

法二:

$\because$ 四边形 $ABCO$ 是 $\square$

$$\therefore \angle ABC = \angle AOC$$

$\because \angle AOC$ 是 $\widehat{AC}$ 所对 $\therefore$ 圆心角, $\angle D$ 是 $\widehat{AC}$ 所对 $\therefore$ 圆周角

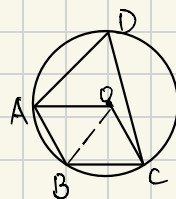
$$\therefore \angle D = \frac{1}{2} \angle AOC$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$

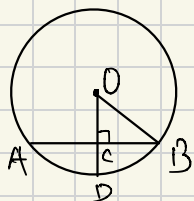
$$\therefore \angle D + \angle ABC = 180^\circ$$

$$\angle D + 2\angle D = 180^\circ$$

$$\angle D = 60^\circ$$



3. 圆 = 半径为 2 cm, 圆 = 一条弦长为 $2\sqrt{3}$ cm, 则此弦中点到所对劣弧中点, 距离为?



由题意画出图形, AB 为 $2\sqrt{3}$ cm 弦.

过圆心 O 作弦 AB 垂线, 垂足为 C, 延长交圆为 D

由垂径定理得: OD 平分 AB, 平分 $\widehat{AB}$

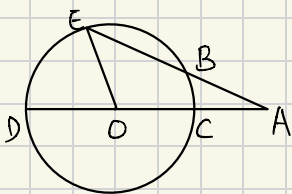
$\therefore$ CD = 长度即为所求值

在 $Rt\triangle OBC$ 中:

$$OC = \sqrt{OB^2 - BC^2} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 1 \text{ cm}$$

$$\therefore CD = OD - OC = 2 - 1 = 1 \text{ cm}$$

4. 如图, 已知 CD 是 $\odot O$ 直径, $\angle EOD = 78^\circ$, AE 交 $\odot O$ 于点 B, 且 $AB = OC$, 求 $\angle A$ 度数!



如图作辅助线

$\therefore$ OB 和 OC 是 $\odot O$ 半径

$$\therefore OB = OC$$

$$\text{又} \because AB = OC$$

$$\therefore AB = OB$$

$$\therefore \angle BOA = \angle A$$

$\therefore \angle EBO$ 是 $\triangle BOA$ 的一个外角

$$\therefore \angle EBO = \angle BOA + \angle A = 2\angle A$$

$\therefore EO$ 和 BO 是 $\odot O$ 半径

$$\therefore EO = OB$$

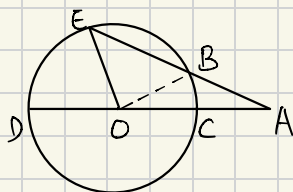
$$\therefore \angle OEB = \angle EBO$$

$\therefore \angle DOE$ 是 $\triangle OEA$ 的一个外角

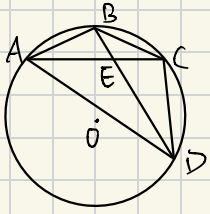
$$\therefore \angle DOE = \angle OEB + \angle A$$

$$78^\circ = 2\angle A + \angle A$$

$$\angle A = 26^\circ$$



5. 如图, 已知 A, B, C, D 是 $\odot O$ 上四个点, $AB = BC$, BD 交 AC 于点 E, 连接 CD , AD



1) 求证: DB 平分 $\angle ADC$

$\because AB = BC$, AB 所对弧为 $\widehat{AB}$, BC 所对弧为 $\widehat{BC}$

$$\therefore \widehat{AB} = \widehat{BC}$$

又 $\because \angle ADB$ 是 $\widehat{AB}$ 所对圆周角, $\angle BDC$ 是 $\widehat{BC}$ 所对圆周角

$$\therefore \angle ADB = \angle BDC$$

$\therefore DB$ 平分 $\angle ADC$

2) 若 $BE = 3$, $ED = 6$, 求 AB 之长

$\because \angle BAC$ 和 $\angle BDC$ 都是 $\widehat{BC}$ 所对圆周角

$$\therefore \angle BAC = \angle BDC$$

$\because$ 由 1) 知 $\angle ADB = \angle BDC$

$$\therefore \angle BAC = \angle ADB$$

$$\text{又} \because \angle ABE = \angle ABD$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle DBA$$

$$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{BE}{AB}$$

$$\frac{AB}{10} = \frac{3}{AB}$$

$$AB = 3\sqrt{3}$$