

知识点一 图形之平移

1. 定义

在平面内, 将一个图形沿某个方向移动一定距离, 图形之这种变换叫做平移变换, 简称平移. 确定一个平移变换: 条件是平移之方向和距离

2. 性质

1) 平移不改变图形之形状与大小, 即平移前后: 两个图形是全等图形

2) 连接各组对应点: 线段平行 (或共线) 且相等

3) 对应线段平行 (或共线) 且相等

4) 对应角相等

知识点二 图形之旋转

1. 定义

在平面内, 把一个平面图形绕着一个定点, 沿着某个方向旋转一定角度, 图形之这种变换叫做旋转变换. 这个定点叫做旋转中心, 这个角度叫做旋转角.

图形之旋转由旋转中心, 旋转方向和旋转角所决定

2. 性质

1) 图形上: 每一点都绕着旋转中心, 沿着相同: 方向旋转了同样大小: 角度

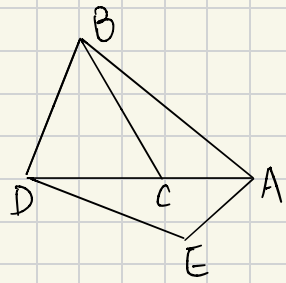
2) 旋转后: 图形之原图形: 形状和大小都没有发生变化, 即它们是全等:

3) 旋转前后两个图形: 对应点到旋转中心: 距离相等

4) 对应点到旋转中心: 连线所成: 角相等, 并且等于旋转角

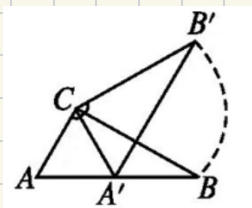
习题

1. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 40^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转, 得到 $\triangle ADE$, 点 B 的对应点 D 恰好落在线段 AC 的延长线上, 连接 BD . 若 $\angle BDE = 90^\circ$, 则 $\angle ABC = ?$



$\therefore$ 旋转
 $\therefore \triangle ABC \cong \triangle ADE$
 $\therefore AB = AD, \angle ABC = \angle ADE$
 $\therefore \triangle ABD$ 是等腰三角形
 $\therefore \angle ABD = \angle BDA$
 在 $\triangle ABD$ 中
 $\angle ABD + \angle BDA + \angle BAD = 180^\circ$
 $2\angle BDA + 40^\circ = 180^\circ$
 $\angle BDA = 70^\circ$
 $\angle ADE = \angle BDE - \angle BDA$
 $= 90^\circ - 70^\circ$
 $= 20^\circ$
 $\therefore \angle ABC = 20^\circ$

2. 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $BC = 6$. $Rt\triangle ABC$ 绕直角顶点 C 逆时针旋转, 当 A 的对应点 A' 落在 AB 边一起始位置上时即停止转动. 则点 B 转过一路径长为?



$$\text{在 } Rt\triangle ABC \text{ 中: } \angle A = 90^\circ - \angle B = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

$\therefore$ 旋转

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'B'C$$

$$\therefore AC = A'C$$

$\therefore \triangle AA'C$ 是等边三角形

$$\therefore \angle A'CB = \angle ACB - \angle ACA' = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

$$\angle BCB' = \angle A'CB' - \angle A'CB = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

$$\therefore \widehat{BB'} = \frac{\angle BCB'}{360^\circ} \times 2\pi \cdot BC$$

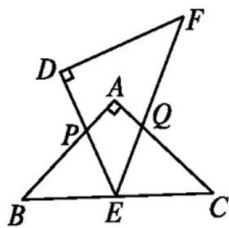
$$= \frac{60^\circ}{360^\circ} \times 2\pi \times 6$$

$$= 2\pi$$

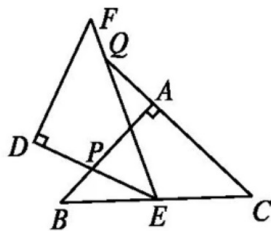
【例3】如图, $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 是两个全等的等腰直角三角形, $\angle BAC = \angle EDF = 90^\circ$, $\triangle DEF$ 的顶点 E 与 $\triangle ABC$ 的斜边 BC 的中点重合. 将 $\triangle DEF$ 绕点 E 旋转, 旋转过程中, 线段 DE 与线段 AB 相交于点 P , 线段 EF 与射线 CA 相交于点 Q .

(1) 如图①, 当点 Q 在线段 AC 上, 且 $AP = AQ$ 时, 求证: $\triangle BPE \cong \triangle CQE$;

(2) 如图②, 当点 Q 在线段 CA 的延长线上时, 求证: $\triangle BPE \sim \triangle CEQ$;
并求当 $BP = a$, $CQ = \frac{1}{2}a$ 时, P, Q 两点间的距离 (用含 a 的代数式表示).

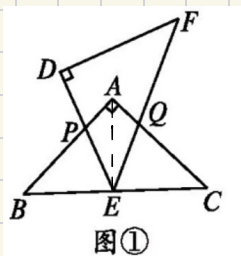


图①



图②

(1)



图①

连接 AE

$\because \triangle ABC$ 是等腰三角形且 E 是 AC 中点

$\therefore \angle BAE = \angle CAE$ (三线合一)

又 $\because AP = AQ, AE = AE$

$\therefore \triangle PAE \cong \triangle QAE$ (SAS)

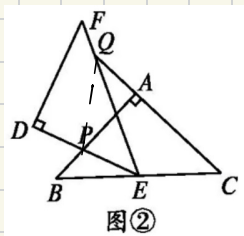
$\therefore \angle APE = \angle AQE$

$\therefore \angle BPE = \angle CQE$

又 $\because \angle B = \angle C, BE = CE$

$\therefore \triangle BPE \cong \triangle CQE$ (AAS)

2)



$\therefore$ 续有

$$\therefore \angle DEF = \angle C$$

又 $\angle FEB$ 是 $\triangle QCE$ 的外角

$$\therefore \angle FEB = \angle EQC + \angle C$$

$$\angle BEP + \angle DEF = \angle EQC + \angle C$$

$$\angle BEP = \angle EQC$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形

$$\therefore \angle B = \angle C$$

$$\therefore \triangle BPE \sim \triangle CEQ$$

$$\therefore \triangle BPE \sim \triangle CEQ$$

$$\therefore \frac{BP}{BE} = \frac{EC}{CQ}$$

$$\text{又 } BE = EC$$

$$\therefore (BE)^2 = BP \cdot CQ$$

$$(BE)^2 = a \cdot \frac{3}{2}a$$

$$BE = \frac{3}{2}\sqrt{2}a$$

$$\therefore BC = 2BE = 3\sqrt{2}a$$

在等腰直角三角形 ABC 中,

$$\text{设 } AB = AC = x$$

$$\text{则 } AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$x^2 + x^2 = (3\sqrt{2}a)^2$$

$$x = 3a$$

$$\text{则 } AP = AB - BP = 3a - a = 2a$$

$$AQ = CQ - AC = \frac{3}{2}a - 3a = -\frac{3}{2}a$$

连接 PQ , 在 $\text{Rt}\triangle APQ$ 中:

$$PQ = \sqrt{AP^2 + AQ^2}$$

$$= \sqrt{(2a)^2 + (\frac{3}{2}a)^2}$$

$$= \frac{5}{2}a$$